- Έστω ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $f: E^2 \to E^2$ με αναλυτικές εξισώσεις:

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1$$

$$y' = \alpha x + \beta y + 2 \quad , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) Πότε η f ισομετρία;

ii) Να γραφεί η f ως σύνθεση παράλληλης μεταφοράς και στροφής ή κατοπτρισμού

ΛΥΣΗ

i) $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δηλαδή ότι $f = T_{\vec{a}} \circ L$

όπου $T_{\vec{a}}$ μια μεταφορά ως προς το $\vec{a} = (1,2)^T$

και L ένας γεωμετρ. μετασχηματισμός με αναλυτική μορφή:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{με } A_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

Αρκεί, λοιπόν να εξετάσουμε πότε ο L είναι ορθογώνιος.

$$A_L \text{ ορθογώνιος} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \left(\frac{1}{2}, \alpha\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \beta\right) \right\rangle = 0 \text{ και} \\ \left\langle \left(\frac{1}{2}, \alpha\right), \left(\frac{1}{2}, \alpha\right) \right\rangle = 1 \text{ και } \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \beta\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \beta\right) \right\rangle = 1 \end{cases}$$

Άρα, παίρνουμε

$$\frac{1}{4}+a^2=1 \qquad \text{και} \quad \alpha \cdot b - \frac{\sqrt{3}}{4}=0$$
$$\frac{3}{4}+b^2=1$$

Επιλύοντας το σύστημα:

$(\alpha, b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ή $(\alpha, b)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Άρα, A_α ορθογώνιος ανν

$$A_\alpha=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A_\alpha=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$

$\det A_\alpha=1$

Κατοπτρισμός ως προς την $y=\tan\frac{\pi}{6}x$

$\det A_\alpha=-1$

ii) Επομένως,

$$f=T_{\vec{\alpha}} \circ R_{0,\frac{\pi}{3}} \quad \text{ή} \quad f=T_{\vec{\alpha}} \circ K_{\pi/6}.$$